

## 二维格子逾渗结构多孔介质渗透率的研究\*

刘志峰 王晓宏\*

中国科学技术大学热科学和能源工程系, 合肥 230027

**摘要** 通过对2万个不同随机结构直接求解 Stokes 方程, 研究格子逾渗结构多孔介质中低 Reynolds 数流动渗透率的随机分布特性和标度律关系的结果表明, 分形多孔介质渗透率与宏观上统计均匀多孔介质渗透率之间存在着本质差异. 对 Darcy 定律适用的宏观上统计均匀多孔介质, 渗透率趋于常数, 与系统尺度和具体结构无关; 而对分形多孔介质, 渗透率依赖于系统尺度和具体结构, 其统计分布呈  $\chi^2$  分布. 在逾渗的临界点附近, 多孔介质中的流动渗透率和电导率具有相同的标度律关系, 不同精度的计算网格之间不存在本质的差异.

**关键词** 多孔介质 逾渗 渗透率 分形

多孔介质中流体的渗流, 是自然界中普遍存在的现象. 随着石油工业的发展, 渗流理论的研究愈加受到关注和重视. 1856年, 法国水利工程师 Darcy 在实验基础上总结出的唯象 Darcy 定律可以描述微观上无序、宏观上统计均匀的多孔介质中单相低速流动, 具体形式是<sup>[1,2]</sup>

$$V = -\frac{k}{\mu} \frac{\Delta P}{L}, \quad (1)$$

其中  $\mu$  是流体粘性系数,  $V$  是渗流的平均速度,  $\Delta P$  是流程长度  $L$  的压降,  $k$  是渗透率. 一般认为 Darcy 渗透率是反映多孔介质结构统计特性的参数. 但多孔介质的空间结构很复杂, 常会出现并非宏观上统计均匀的分形结构<sup>[2-4]</sup>, 深入研究多孔介质中的渗流问题具有重要意义.

Broadbend 等<sup>[5]</sup>于 1957 年提出的逾渗模型, 在数学上表述很简单但内涵和性质却非常丰富, 它可以成功地用来描述临界相变现象. 近年来, 人们对逾渗模型有着很多研究, 并将其用于研究诸如通讯网络、复合材料特性、化学催化反应和社会科学等各类复杂问题<sup>[3,4,6]</sup>. 多孔无序介质是由孔隙和固体

骨架随机组合构成的, 若不考虑多孔介质空间结构的长程相关性及固体骨架的弹性变化, 这本身就构成一个简单逾渗问题. 对于规则网格上的座和键以某一概率  $p$  被占有, 不被占有的概率为  $(1-p)$ , 这种逾渗模型称为格子逾渗 (lattice percolation) 模型; 若被占有或不被占有并不限制在规则网格的离散相时, 称为连续逾渗 (continuum percolation) 模型. 10 年来, 美国的 Andrade, Stanley 以及以色列的 Havlin 等从统计物理学的角度出发, 利用逾渗模型对多孔介质中的流动问题进行研究, 并取得新的进展<sup>[7-14]</sup>. 采用少数几个不同随机构型, 对格子逾渗结构多孔介质中的渗流, 直接求解 Navier-Stokes 方程, 发现流体的动能呈幂函数分布<sup>[8]</sup>; 并初步研究了具有长程相关的逾渗结构多孔介质中的流动弥散现象<sup>[11]</sup>. 对压力场求解 Kirchhoff 方程, 较系统地研究了多孔介质中流体质点运动的统计规律<sup>[12-14]</sup>. 对压力场求解 Kirchhoff 方程得到的逾渗结构多孔介质上流动的渗透率和电导率在临界点及其附近具有同样的标度律性质; 若求解 Navier-Stokes 方程, 渗透率在临界点及其附近的标度律性质还不清楚. Andrade 等<sup>[9]</sup>认为: 低 Reynolds 数下由流动粗网格计

2003-06-02 收稿, 2003-07-02 收修改稿

\* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 10002019)

\* 联系人, E-mail: xhwang@usic.edu.cn

算得到的渗透率和电导率似乎具有类似的性质, 而提高网格计算精度, 渗透率的标度指数将会增加, 似乎逼近于连续逾渗中渗透率的标度指数<sup>[6,15,16]</sup>. 若果真如此, 高网格计算精度下的中、低 Reynolds 数流动的渗透率和电导率将具有完全不同的标度律性质.

逾渗结构在临界点  $p = p_c$  处将出现具有分形结构的跨越集团, 该集团为随机分形, 在系综统计平均意义下具有分形特征. 对于  $p > p_c$ , 在系综统计平均意义下, 当系统尺度远小于关联尺度时, 具有分形特征; 系统尺度远大于关联尺度时, 是宏观统计均匀的, 此时的粗粒化平均尺度要大于关联尺度. 由于描述粘性流体运动的 Stokes 方程的数值求解计算量随着系统尺度的增大而急剧增大, 因此只能在较小的系统尺度下予以计算, 这时为克服统计涨落所带来的影响, 我们采用很多不同结构进行系综统计平均. 我们曾对每一个不同的系统尺度  $L$  和孔隙占有概率  $p$  各自采用 2 万个不同随机结构直接求解 Stokes 方程, 研究了逾渗结构多孔介质中低 Reynolds 数流动的统计规律, 结果表明: 分形多孔介质与宏观上统计均匀多孔介质中的流动之间存在着本质的差异<sup>[17]</sup>. 本文将在原有工作的基础上, 研究二维格子逾渗结构多孔介质中流动渗透率的随机分布特性和标度律性质. 计算结果表明, 分形多孔介质与宏观上统计均匀多孔介质的渗透率之间存在着本质差异, 在逾渗的临界点及其附近, 多孔介质上的低 Reynolds 数流动渗透率和电导率具有相同的标度律关系, 不同精度的计算网格之间不存在本质的差异.

## 1 数学模型

利用二维方网格的点逾渗模型来描述多孔介质(图 1): 模拟区域被划分成  $L \times L$  个方的单元, 每个单元大小均为  $\delta l \times \delta l$ ,  $\delta l$  固定不变; 孔隙以概率  $p$  占据小的单元, 固体骨架占据小单元的概率为  $(1-p)$ . 当  $p \geq p_c$  和  $L \rightarrow \infty$  时(对二维方网格的点逾渗模型,  $p_c = 0.5927$ <sup>[4,6]</sup>), 存在无穷大的跨越集团, 亦即存在相互连通的孔隙, 流体可以在孔隙中流动. 否则, 孔隙只是孤立地存在于多孔介质中, 不能形成连续的通道以供流体渗流.

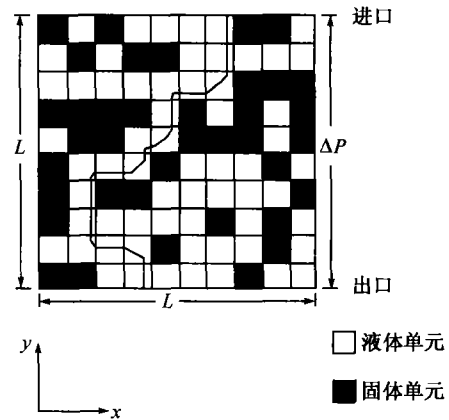


图 1 二维格子逾渗结构多孔介质中的流体流动示意图

假定流体是 Newton 流体, 流动是定常、等温的, 多孔介质中渗流速度很小时, 可以忽略对流作用, 这时应满足 Stokes 方程, 即

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \mathbf{V} = \nabla P \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

固液交界面采用无滑移边界条件, 即  $\mathbf{V}_{sf} = 0$ ; 在流体进出口处, 假定水平方向的速度为 0, 即  $(V_x)_{in, out} = 0$ , 由连续方程, 垂直方向的速度梯度为 0, 即  $\left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)_{in, out} = 0$ ; 左右边界采用周期性边界条件; 上边界进口处给定压力  $P = 1$ , 下边界出口处给定压力  $P = 0$ . 采用 SIMPLE 方法<sup>[18]</sup>求解方程(2), 考虑到方程(2)是线性方程, 为简化方程的离散形式, 可以设定  $\delta l = 1$ ,  $\mu = 1$ . 记  $\frac{\delta l}{\Delta l} = n$ ,  $\Delta l$  是计算网格单元的边长. 我们采用两种不同精度的计算网格以考察计算精度对数值结果的影响; 一种是计算精度较低的网格, 计算网格的单元长度等于逾渗结构小单元的长度, 即  $n = 1$ ; 另一种是将计算网格细分得到的精度较高的网格, 计算网格的单元长度为逾渗结构小单元长度的  $1/4$ :  $\Delta l = \frac{1}{4} \delta l$ , 即  $n = 4$ . 对不同精度的计算网格, 我们通过数值求解方程(2), 得到流体速度场, 求得压力梯度方向的平均速度  $\bar{V}_y$ , 进而可以形式地求得对应每个随机逾渗结构的 Darcy 渗透率  $k$ :  $k = -\frac{\mu L \delta l \bar{V}_y}{\Delta P}$ .

## 2 分形多孔介质与统计均匀多孔介质 Darcy 渗透率 $k$ 的统计性质

逾渗结构在临界点  $p = p_c$  处, 跨越集团具有分形结构; 在  $p > p_c$ , 对足够大的系统尺度  $L$ , 跨越集团结构是统计均匀的<sup>[4,6]</sup>. 为了解分形介质和统

计均匀介质 Darcy 渗透率的差异, 我们在  $n = 1$  的情况下对  $p = p_c = 0.5927$  以及  $p = 0.75$ , 各计算了 20000 种不同结构. 图 2 给出了  $p = p_c$  以及  $p = 0.75$  时渗透率  $k$  的平均值  $\bar{k}$  以及方差  $\Delta k$  与尺度  $L$  的关系.

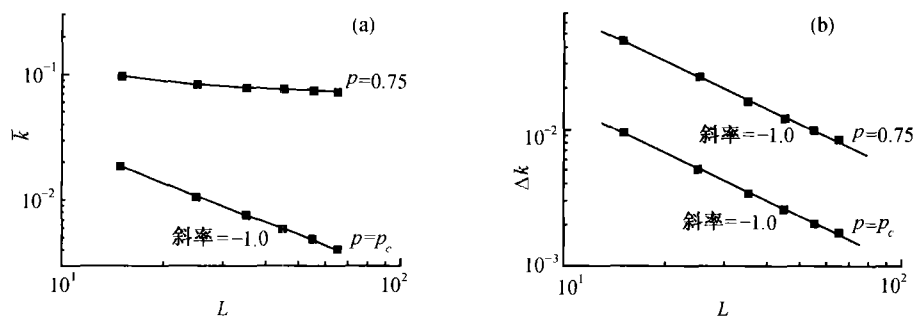


图 2 平均渗透率  $\bar{k}$  以及方差  $\Delta k$  与系统尺度  $L$  的关系 (取  $n = 1$ )

结果表明:

(1) 当  $p = p_c$  时,  $\bar{k} \propto L^{-\tilde{\mu}}$  ( $\tilde{\mu} \approx 1.0$ ); (3)

(2) 当  $p > p_c$  时, 对足够大的  $L$ , 有  $\bar{k} \rightarrow$  常数.

(4)

有趣的是, 二维逾渗结构导体的电导率在临界点  $p_c$  处, 满足关系  $\sigma \propto L^{-\tilde{\mu}}$ , ( $\tilde{\mu} = 0.9745$ )<sup>[6]</sup>. 上述计算结果表明, 对计算精度较低的网格求解 Stokes 方程得到的多孔介质渗透率在临界点处和电导率具有相同的标度指数.

由 20000 个不同随机结构, 可以计算出渗透率  $k$  的统计分布. 在临界点  $p = p_c$  处, 对不同的系统尺度  $L$ , 图 3 显示出变量  $k_L^* = Lk$  的分布函数

$f(k_L^*)$  重合, 这和  $p = p_c$  时渗透率的平均值  $\bar{k} \propto L^{-1}$  及其方差  $\Delta k \propto L^{-1}$  相吻合; 图 3 还显示出  $k_L^*$  渗透率的分布为  $\chi^2$  分布:  $f(k_L^*) = 2185.0(k_L^* - 0.06)^2 e^{-16.32(k_L^* - 0.06)}$ . 当  $p > p_c$  (取  $p = 0.75$ ) 时, 渗透率  $k$  服从 Gauss 分布, 对不同系统尺度  $L$ , 变量  $k_L^* = L(k - \bar{k})$  的分布函数  $f(k_L^*)$  相重合 (见图 4), 这和  $p > p_c$  时渗透率的涨落  $\Delta k \propto L^{-1}$  相吻合, 又由  $\bar{k} \rightarrow$  常数, 可以得到, 当  $L \rightarrow \infty$  时, 分布函数  $f(k)$  趋于脉冲函数  $\delta(k - \bar{k})$ , 也就是说, 在  $p > p_c$  情况下, 逾渗结构是统计均匀的, 对足够大的  $L$ , 渗透率仅与  $p$  有关, 而与  $L$  和具体结构无关.

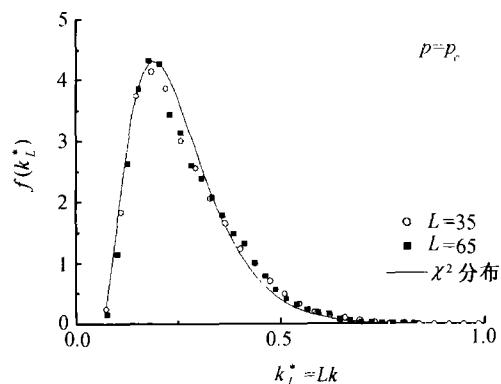


图 3  $p = p_c$  时变量  $k_L^*$  ( $k_L^* = Lk$ ) 的分布函数

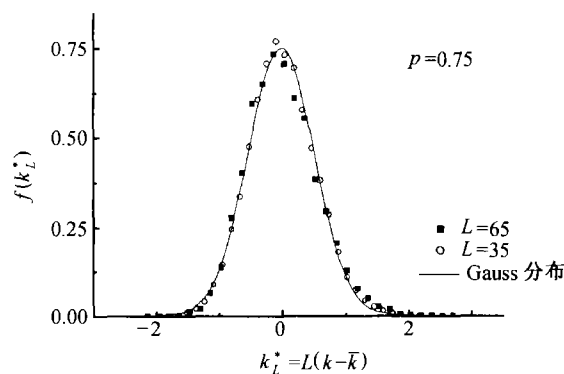


图 4  $p = 0.75$  时变量  $k_L^*$  ( $k_L^* = L(k - \bar{k})$ ) 的分布函数

从上述计算结果可以看出,逾渗结构多孔介质在临界点  $p = p_c$  和远离临界点  $p = 0.75$  处渗透率的性质存在着明显的不同:当  $p > p_c$  时,若系统尺度  $L$  足够大,逾渗结构是统计均匀的,  $\bar{k}$  为常数, Darcy 定律成立;在临界点  $p = p_c$  处,逾渗结构中绝大多数都被固体障碍物和不通的通道所占有,流体实际流动的通道是分形,如果增大系统尺度  $L$ ,同时也增大了障碍物和不通的通道在结构中所占有的比率,从而导致渗透率的减小,当  $L \rightarrow \infty$  时,  $\bar{k} \rightarrow 0$ ,渗透率不仅和  $L$  有关,并且由于其涨落和平均值为同等量级,渗透率还依赖于具体结构,此时 Darcy 定律不能适用.

在自然界中,分形的存在通常依赖于观察尺度的范围,只有当观察尺度处于某个范围之内时,被观察对象才具有分形性质.随观察尺度的变化,分形多孔介质和宏观统计均匀多孔介质的渗透率之间是如何渡越的,是统计物理学所关心的问题.

### 3 分形多孔介质和宏观统计均匀多孔介质之间平均渗透率的渡越

对逾渗结构而言,定义关联长度  $\xi$  为属于同一集团两点间的平均距离,  $\xi$  表征有限集团的大小,是体系唯一的特征尺度.当  $p$  靠近  $p_c$  点,有  $\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$  (二维情况下,  $\nu = \frac{4}{3}$  [6]),在  $p_c$  点,关联长度  $\xi$  趋于无穷大.对  $p > p_c$ ,当系统尺度远小于相关长度,即  $L \ll \xi$  时,逾渗结构呈现分形性质;当系统尺度远大于相关长度,即  $L \gg \xi$  时,逾渗结构是统计均匀的.从图 2(a)可以看出,  $p = 0.75$  时的平均渗透率  $\bar{k}$  随系统尺度  $L$  变化曲线斜率是逐步减小的,亦即  $L$  较小时,渗透率  $k$  接近于临界点  $p = p_c$  处的性质,只有当系统尺度  $L$  较大时,平均渗透率  $\bar{k}$  才趋于常数.本节我们将研究,在临界点附近,渗透率从小尺度时具有分形性质到大尺度时具有宏观统计均匀性质之间的渡越.

由于关联长度  $\xi$  是逾渗结构中唯一的特征尺度,我们可以推断在  $p_c$  点附近,渗透率  $\bar{k}$  满足标度关系:

$$\bar{k} = \frac{1}{\xi^{\bar{\mu}}} f\left(\frac{L}{\xi}\right), \quad (5)$$

其中  $\bar{\mu} \approx 1.0$ , 函数  $f(x)$  具有以下性质:

$$\begin{cases} f(x) = x^{-\bar{\mu}}, x \rightarrow 0 \\ f(x) \rightarrow \text{常数}, x \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (6)$$

对于计算精度较低的网格 ( $n = 1$ ), 当  $p < 0.65$  时,在不同的孔隙占有概率  $p$  下计算得到的平均渗透率  $\bar{k}$  随系统尺度  $L$  的变化曲线都按标度关系式(5)重合成一条曲线,能很好拟合出函数  $f(x)$  (见图 5). 在  $p \rightarrow p_c$  时,  $\xi \rightarrow \infty$ , 当系统尺度  $L$  有限时,  $\frac{L}{\xi} \rightarrow 0$ , 由标度关系式(5)和(6)可以得到,  $f\left(\frac{L}{\xi}\right) \rightarrow \left(\frac{L}{\xi}\right)^{-\bar{\mu}}$ ,  $\bar{k} \propto L^{-\bar{\mu}}$ , 此时逾渗结构可看成是分形;对  $p > p_c$ , 当  $L$  很大时,  $\frac{L}{\xi} \rightarrow \infty$ , 由(5)和(6)式可以得到  $f\left(\frac{L}{\xi}\right) \rightarrow \text{常数}$ ,  $\bar{k} \rightarrow \text{常数}$ . 在  $p_c$  点附近,对足够大的  $L$ ,  $\frac{L}{\xi} \rightarrow \infty$ , 由(5)和(6)式可以得到渗透率  $\bar{k}$  与概率  $p$  的如下幂函数关系:

$$\bar{k} \propto \xi^{-\bar{\mu}} \sim (p - p_c)^\alpha, \quad (7)$$

其中  $\alpha = \bar{\mu}\nu \approx \frac{4}{3}$ . 二维逾渗结构的导体在临界点  $p_c$  附近,其电导率具有相同的标度关系式(5)~(7) [6,19].

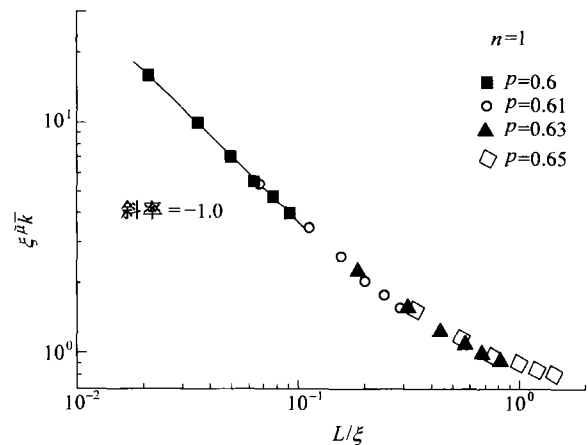


图5 计算精度较低的网格 ( $n = 1$ ) 下得到的临界点附近平均渗透率的标度关系

Andrade 等 [9] 采用少数几个不同随机结构,在粗网格  $n = 1$  下对低 Reynolds 数流动计算得到  $\alpha \approx$

1.47, 这和电导率中的  $\alpha \approx 1.3$  相近, 从而提出粗网格下计算得到的渗透率和逾渗结构中的电导率似乎具有类似的性质, 而采用精度较高的计算网格  $n = 4$  计算时得到  $\alpha \approx 1.58$ . 连续逾渗的渗透率比格子逾渗中流动渗透率的标度律指数相应要高<sup>[6,15,16]</sup>, 因而认为提高网格计算精度得到的渗透率的标度律指数将会增加, 似乎逼近于连续逾渗中渗透率的标度指数.

为了弄清算解 Stokes 方程的网格计算精度对多孔介质渗透率标度律的影响, 和 Andrade 等<sup>[9]</sup>一

样, 我们采用精度较高的计算网格  $n = 4$  进行了计算. 在临界点处平均渗透率  $\bar{k}$  随系统尺度  $L$  的变化满足  $\bar{k} \propto L^{-\mu}$ ,  $\bar{\mu} \approx 1.0$  (见图 6(a)), 亦即采用粗网格  $n = 1$  和加密网格  $n = 4$  所得到的渗透率的标度指数  $\bar{\mu}$  完全相同. 如图 6(b) 所示, 对于  $p < 0.64$ , 有同样的标度关系:  $\bar{k} = \frac{1}{\xi^\alpha} f\left(\frac{L}{\xi}\right)$ . 计算结果表明,  $n = 4$  和  $n = 1$  所得到的多孔介质渗透率的标度律完全一样. 我们将分析在文献 [9] 中  $\alpha$  偏离 4/3 的原因.

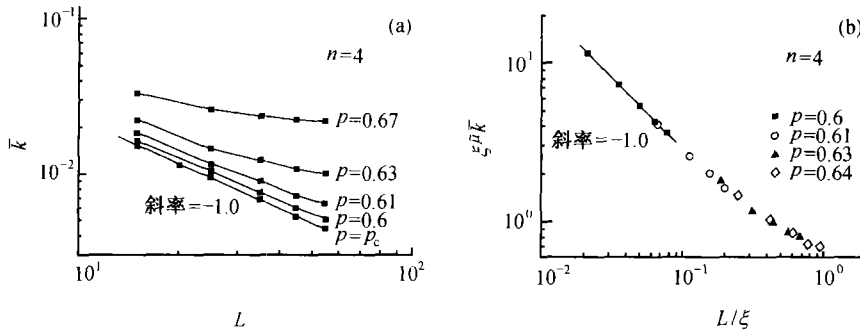


图 6 计算精度较高的网格 ( $n = 4$ )

(a) 临界点及其附近平均渗透率与系统尺度  $L$  的关系; (b) 临界点附近平均渗透率的标度关系

在  $p_c$  点附近, 对足够大的  $L$ , 由 (5) 和 (6) 式可以得到渗透率  $\bar{k}$  与概率  $p$  具有幂函数关系:  $\bar{k} \propto \xi^{-\bar{\mu}} \sim (p - p_c)^\alpha$ . 由标度关系式 (5) 对于  $n = 1$  和  $n = 4$ , 分别当  $p < 0.65$  和  $p < 0.64$  时成立, 故这种幂函数关系只有在  $p < 0.65$  ( $n = 1$ ) 和  $p < 0.64$  ( $n = 4$ ), 且系统尺度  $L$  足够大时才成立. 由于运动方程及其边界条件的复杂性和计算机的运算速度有限, 只能对较小的系统尺度  $L$  进行计算, 在我们数值模

拟范围内所得到的平均渗透率  $\bar{k}$  与概率  $p$  的关系在双对数坐标图上具有明显的弯曲, 亦即对于小尺度  $L$  并不存在标度律区. 故不能由平均渗透率  $\bar{k}$  与概率  $p$  的关系的双对数坐标图直接测出斜率以计算标度指数  $\alpha$ . 由于标度关系式 (5) 对标度指数很敏感<sup>[6,19]</sup>, 它将是成功克服有限尺度效应、计算标度指数  $\alpha$  的一个很好的方法.

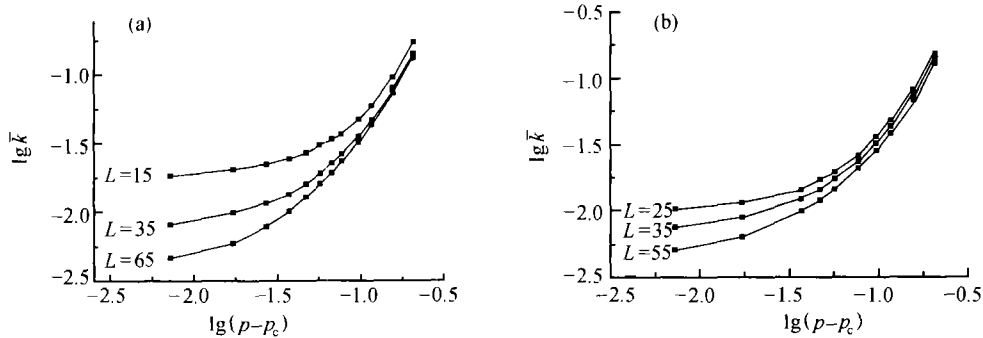


图 7 平均渗透率与  $p - p_c$  的关系

(a) 计算精度较低的网格 ( $n = 1$ ); (b) 计算精度较高的网格 ( $n = 4$ )

#### 4 结论

由于多孔介质空间结构的随机性, 研究分形多孔介质中的流动问题有着广泛的应用价值. 逾渗结构在临界点为分形, 而在非临界点时, 小系统尺度下具有分形特性, 大系统尺度下为统计均匀介质, 研究在逾渗结构多孔介质中的渗流, 可以帮助人们了解在分形和统计均匀性多孔介质中渗流的各自规律及两者之间的关系.

对每个给定的系统尺度  $L$  和孔隙占有概率  $p$  各采用 2 万个不同随机二维格子逾渗结构直接求解 Stokes 方程, 求得渗透率的平均值和分布函数; 由 2 万个样本得到的渗透率平均值和分布函数与由 1 万个样本得到的结果并无本质区别. 我们的计算结果表明: 宏观统计均匀多孔介质的渗透率趋于常数, 与系统尺度和具体结构无关, 此时 Darcy 定律适用. 而对分形多孔介质, 渗透率的统计分布为  $\chi^2$  分布, 渗透率依赖于系统尺度和具体结构, Darcy 定律不能适用. 采用多个随机二维格子逾渗结构计算, 可以克服用少数几个随机二维格子逾渗结构计算所带来的误差. 数值结果显示, 在逾渗的临界点及其附近, 二维格子逾渗结构多孔介质上的流动渗透率和电导率具有相同的标度律关系, 不同精度的计算网格之间不存在本质的差异.

#### 参 考 文 献

- 1 Alder P M. Porous Media: Geometry and Transports. Boston: Butterworth-Heinemann Press, 1992
- 2 孔祥言. 高等渗流力学. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999
- 3 Stanley H E, et al. Percolation phenomena: A broad-brush introduction with some recent applications to porous media, liquid water, and city growth. *Physica A*, 1999, 266: 5
- 4 刘柏谦, 等. 逾渗理论导论. 北京: 科学出版社, 1997
- 5 Broadbent S R, et al. Percolation processes I. Crystals and mazes. *Proc Camb Phil Soc*, 1957, 53: 629
- 6 Bunde A, et al. Fractals and Disordered Systems, Bunde A, et al. eds. Heidelberg: Springer-Verlag, 1991
- 7 King P R, et al. Predicting oil recovery using percolation. *Physica A*, 1999, 266: 107
- 8 Andrade J S, et al. Fluid flow through porous media: The pole of stagnant zones. *Phys Rev Lett*, 1997, 79: 3901
- 9 Andrade J S, et al. Percolation disorder in viscous and nonviscous flow-through porous-media. *Phys Rev E*, 1995, 51: 5725
- 10 Andrade J S, et al. Inertial effects on fluid flow through disordered porous media. *Phys Rev Lett*, 1999, 82: 5249
- 11 Makse H A, et al. Tracer dispersion in a percolation network with spatial correlations. *Phys Rev E*, 2000, 61: 583
- 12 Lee Y, et al. Traveling time and traveling length in critical percolation clusters. *Phys Rev E*, 1999, 60: 3425
- 13 Andrade J S, et al. Flow between two sites on a percolation cluster. *Phys Rev E*, 2000, 62: 8270
- 14 Andrade J S, et al. Dynamics of viscous penetration in percolation porous media. *Phys Rev E*, 2000, 63: 051403
- 15 Halperin B I, et al. Differences between lattice and continuum percolation transport exponents. *Phys Rev Lett*, 1985, 54: 2391
- 16 Feng S, et al. Transport properties of continuum systems near the percolation threshold. *Phys Rev B*, 1987, 35: 197
- 17 Wang X H, et al. Statistical properties for two-dimensional fluid flow in percolation porous media. *Physica A*, 2002, 311: 320
- 18 Patankar S V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Washington: Hemisphere, 1980
- 19 ben-Avraham D, et al. Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2000